

## SONLU ELEMENTLƏR ÜSULUNUN ƏSAS MÜNASİBƏTLƏRİ

T.B.ABDULLAYEV  
«Dənizneftqazlayih» DETLİ

*Sonlu elementlər üsulunun əsas ideyası ondan ibarətdir ki, istənilən kəsilmələr kəmiyyəti sonlu sayda altoblastlarda təyin olunmuş hissə-hissə kəsiklər funksiyalar çoxluğunda qurulmuş diskret modellə apraksimasiya etmək olar. Yerdəyişmə hissə-hissə kəsilmələr funksiyalar çoxluğu və apraksimasiya olunur. Bunun üçün elastiklik mühitin baxılan oblastı tor elementlərinə bölünür ki, bunlar da üçbujaqların simmetriya oxu ətrafında fırlanmasından olunur.*

*Belə olduqda elementlərin sayı əbədi üçulla həlli lazımı dəqiqliyinin olmasına imkan verin optimal bölgədəkindən çox olur. Qurunun statik matrisi simmetrik və müsbət müəyyəndir və təklif olunan tənliklər sisteminin həll edilərkən nəzərə alınır.*

*Sonlu elementlər üsulunun (SEÜ) əsas ideyası ondan ibarətdir ki, istənilən kəsilmələr kəmiyyəti sonlu sayda altblastlarda təyin olunmuş hissə-hissə kəsilmələr funksiyalar çoxluğunda qurulmuş diskret modellə apraksimasiya etmək olar. Yerdəyişmə hissə-hissə kəsilmələr funksiyalar çoxluğu ilə apraksimasiya olunur(1). Bunun üçün elastiklik mühitin baxılan oblastı tor (halqa) elementlərinə bölünür ki, bunlar da üçbujaqların simmetriya oxu ətrafında fırlanmasından alınır (şək.1) şəbəkə yerdəyişmələri sektoru iki komponentə malikdir. (U,V);*

*U-radial istiqamətdə yerdəyişmə;*

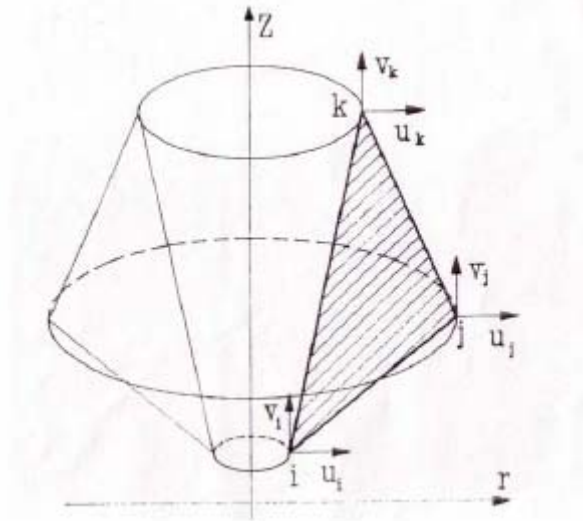
*V-simmetriya oxu istiqamətdə yerdəyişmə.*

*Elementlərin daxili nöqtəsindəki yerdəyişmə birinji tərtib çoxhədli ilə apraksimasiya oluna bilər.*

$$\left. \begin{aligned} U &= \alpha_1 + \alpha_2 Z + \alpha_3 Z^2 \\ V &= \alpha_4 + \alpha_5 r + \alpha_6 Z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

*Burada  $\alpha_i$ ;  $i = 1,5$  naməlum əmsallardır,  $r$  və  $z$  uyğun olaraq, nöqtənin radial və ox koordinatlarıdır. Qeyd edək ki, yerdəyişmə birinji tərtib çoxhədli ilə apraksimasiya olunarkən birinji tərtib üçbujaq elementlərdən (simeeks elementdən) istifadə olunması təklif olunur.*

Birinji tərtib olunan elementlərin tətbiqi ona əsaslanır ki, nazik divarlı boruları dirəklərin hesabında kiçik ölçülü sonlu elementlərdən istifadə olunması həndəsi şərtini gözləmək lazımdır. Belə olduqda elementlərin sayı ədədi üsulla həlli lazımı dəqiqliyinin olunmasına imkan verən optimal bölgədəkindən çox olur. Bu hallarda ikinci və daha yüksək tərtiblərin tətbiqi yaddaşın və hesablanma vaxtının artması ilə əlaqədar artıq çətinliklər yaradır.



Şəkil. 1. Üçbucaqlı tor element.

Fərz edək ki, üçbucaqlı elementin düyünləri saat əqrəbinin əks istiqamətinə nəzərə nəzərə alınmışdır.  $i, j, k$  (şəkil.1). birinci düyünün yerdəyişmə vektoru

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Onda elementin altı yerdəyişmə komponentləri aşağıdakı vektorla ifadə olunur.

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Elementin daxilindəki yerdəyişmə bu altı kəmiyyətlə yeganə olaraq təyin olunmalıdır. Bu qiymətləri (1) nəzərə alıqda naməlum  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$

kəmiyyətləri düyün yerdəyişmələri vasitəsilə ifadə etmək olar. Nətiyə olaraq  $u$  və  $v$  yerdəyişmələri üçün elementin daxili nöqtələrində  $(r, z)$  alırıq:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & O & N_j & O & N_k & O \\ O & N_i & O & N_j & O & N_k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$N_i = \frac{I}{2 \cdot S} (a_i + b_i r + c_i Z) \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} a_i &= r_j z_k - r_k z_j \\ b_i &= z_j - z_k \\ c_i &= r_k - r_j \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$N_j = \frac{I}{2 \cdot S} (a_j + b_j r + c_j Z) \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} a_j &= r_k z_i - r_i z_k \\ b_j &= z_k - z_i \\ c_j &= r_i - r_k \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$N_k = \frac{I}{2 \cdot S} (a_k + b_k r + c_k Z) \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} a_k &= r_i z_j - r_j z_i \\ b_k &= z_i - z_j \\ c_k &= r_j - r_i \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

harada  $S$  -üçbujağın sahəsidir.

Burada  $[N]^T \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}$  matrisi formanın funksiyasıdır.

Matris sahəsində  $\{\sigma\}$  funksiyası aşağıdakı kimi olar

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \gamma_{rz}\} \quad (11)$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \gamma_{rz}\}$$

Yerdəyişmə ilə deformasiyanın əlaqəsini matris şəklində ifadə olunur:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r, \\ \varepsilon_z, \\ \varepsilon_\theta, \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial r \\ \partial \partial / \partial z \\ u / r \\ du / \partial r + dv / dz \end{Bmatrix} \quad (13)$$

(4) differensiallanaraq və (13)-də yerinə yazsaq yerdəyişmə ilə deformatsiya arasında əlaqəni alarıq:

$$\{\varepsilon^e\} = [B^e] \cdot \{\delta^e\} \quad (14)$$

Burada  $[B^e]$ -tənliklərin əmsallarının transponir matrisidir

$$[B^e] = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ N_i S / \bar{r} & 0 & N_j S / \bar{r} & 0 & N_k S / \bar{r} & 0 \\ C_i & b_i & C_j & b_j & C_k & b_k \end{bmatrix} \quad (15)$$

Burada  $\bar{r}$  elementin koordinat mərkəzinin komponentidir

$$\bar{r} = (r_i + r_j + r_k) / 3 \quad (16)$$

(15) ifadələrindən görünür ki,  $[B]$  matrisi aslıdır  $N_i, N_j, N_k$ , -dan, hansılarla üçbujağın  $r$  və  $z$  koordinatları daxildir. Buna əsasən müstəvi deformatsiyadan fərqli olaraq, elementin daxilindəki deformatsiya sabit olmayacaq. Bu fərq  $\varepsilon_\theta$  ədədi ilə müəyyənləşir. Maddənin izotrop olduğunu qəbul edərək, matris şəklində Huk qanunu yazmaq olar:

$$\{\delta^e\} = [D^e] \cdot \{\varepsilon^e\} \quad (17)$$

harada

$$[D^e] = \begin{bmatrix} k+4/3G & k-2/3G & k-2/3G & O \\ k-2/3G & k+4/3G & k-2/3G & O \\ k-2/3G & k-2/3G & k+4/3G & O \\ O & O & O & G \end{bmatrix} \quad (18)$$

Elementlərin elastiklik xarakteristikasının matrisləridir. Əgər fərz etsək ki,  $N$  elementlərə bölünüb, onda bu oblastın SEM-nu təyin edən tənliyi aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$[k] \cdot \{\delta\} = \{F\} \quad (19)$$

harada

$$[k] = \sum_{e=1}^N [k^e] \quad (20)$$

$$[F] = - \sum_{e=1}^N [F^e] \quad (21)$$

güjün global vektorudur.

$[k^e]$ -elementlərin sərtlik matrisidir.

$i, j, k$ -elementlərin sərtlik matrisini aşağıdakı şəkildə qurmaq olar.

$$[k^e] = 2\pi \int [B^e]^T \cdot [D^e] \cdot [B^e] \cdot r \cdot dr \cdot dz \quad (22)$$

$[B^e]$  matrisi nöqtələrin koordinatlarından asılı olduğu üçün, bu ifadəni halqalı elementin bütün həjminə nəzərən inteqrallanması çətinləşir. Bu elementlərin sərtliyi matrislərinin dəqiq ifadələri (2,3)-də verilib. Lakin bu ifadələrdə loqarifm ifadələrində  $(r_i / r_j)$ -tipli ifadələr vardır. Bu ifadələr sərtlik matrisinin hesablanmasında çətinlik yaradır. Bu çətinlik ondan ibarətdir ki, elementlər simmetriya oxundan böyük məsafədə olduqda  $r_i / r_k$  yaxınlaşır bizə isə loqarifmi dəqiq hesablanır. O bir tərəfdən əgər üçbujağın hər-hansı bir düyününü simmetriya oxu üzərində olarsa və ya üçbujağın tərəflərindən biri simmetriya oxuna paralel olarsa, onda dəqiq ifadələrdə qeyri-müəyyənliklər alınır, hansı ki, əlaqə çətinliklər yaradır. Sonradan baxılan məsələdə əksər elementlərdə üçbujaqlı elementlərin tərəfi « z » oxuna paralel olacaq. Bununla əlaqədar olaraq burada sadə təqribi üsuldən istifadə edəcəyik ki, mahiyət ondan ibarətdir ki,  $[B]$  matrisi,  $\bar{r}$  və  $\bar{z}$  koordinatları olan elementin kəsiyinin ağırlığı mərkəzi üçün təyin olunur:

$$\bar{z} = (z_i + z_j + z_k)/3 \quad (23)$$

$$\text{onda} \quad [k^e] = 2\pi \bar{r} \cdot S \left[ \bar{B}^e \right]^T \cdot [D^e] \cdot \left[ \bar{B}^e \right] \quad (24)$$

$[B]$ -matrisi üzərindəki xətt onun təqribi olduğuna işarədir.

$\{F^e\}$ -elementi üçün qüvvələr vektoru (21)- formada aşağıdakı şəkildə olar:

$$\{F^e\} = \{F_R^e\} + \{F_P^e\} + \{F_{\epsilon_0}^e\} + \{F_{\delta_0}^e\} \quad (25)$$

Burada  $\{F_R^e\}$  vektoru (həjmi) paylanmış yüklə yüklənərək belə hesablanır:

$$\{F_R^e\} = - \int_{\bar{v}} [N]^T \cdot \{P\} \cdot dv \quad (26)$$

İntegrallasaq alarıq:

$$\{F^e\} = \frac{2\pi S}{12} \begin{Bmatrix} (2r_i + r_j + r_k)F_r \\ (2r_i + r_j + r_k)F_z \\ (r_i + 2r_j + r_k)F_r \\ (r_i + 2r_j + r_k)F_z \\ (r_i + r_j + 2r_k)F_r \\ (r_i + r_j + 2r_k)F_z \end{Bmatrix} \quad (27)$$

(27)-dən görünür ki,  $F_r$  və  $F_z$  komponentləri elementin üç düyünləri arasında bərabər paylanmışdır. Böyük hissə fırlanma oxundan daha uzaq olan düyünün payına düşür.

Səth gərginlikləri daxil olan vektor belə hesablanır.

$$\{F_P^e\} = \int_S [N]^T \cdot \begin{Bmatrix} P_r \\ P_z \end{Bmatrix} \cdot ds \quad (28)$$

$P_r$  və  $P_z$  uyğun olaraq səth gərginliyinin  $r$  və  $z$  üzrə komponentlərdir.

$i$  və  $j$  düyünləri arasındakı tərəfə gərginliyin tərsinə baxsaq, burada  $N_k = 0$  olduğundan (28) –dən alarıq:

$$\{F_R^e\} = \frac{2L_{ij}}{6} \begin{Bmatrix} (2r_i + r_j)P_r \\ (2r_i + r_j)P_z \\ (r_i + 2r_j)P_r \\ (r_i + 2r_j)P_z \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Burada  $L_{ij}$  -i və  $j$  düyünləri arasındakı tərəfin uzunluğudur.

$$L_{ij} = \sqrt{(r_i - r_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (30)$$

İlkin deformasiya ( $\varepsilon_0$ ) və gərginlik  $\{\sigma_0\}$ -la şərtlənən düyün qüvvələri uyğun olaraq belə hesablanır:

$$\{F_{\varepsilon_0}^e\} = - \int [B]^T \cdot [D] \cdot \{\varepsilon_0\} \cdot dv \quad (31)$$

$$\text{və ya} \quad \{F_{\varepsilon_0}^e\} = - [B]^T \cdot [D] \cdot \{\varepsilon_0\} \cdot 2\pi \cdot r \cdot S \quad (32)$$

$$\{F_{\sigma_0}^e\} = - \int [B]^T \cdot [D] \cdot \{\sigma_0\} \cdot dv \quad (33)$$

$$\text{və ya} \quad \{F_{\sigma_0}^e\} = [B]^T \cdot \{\sigma_0\} \cdot 2\pi \cdot r \cdot S \quad (34)$$

Sərtliyin global matrisini və  $\{F\}$  qüvvəsinin global vektorunu tərtib etdikdən sonra jəbri tənliklərin (19) ümumi sistemin həllində düyünün yerdəyişmələrinin vektoru  $\{\delta\}$  təyin olunur. Elementin istənilən nöqtəsində gərginlik aşağıdakı düsturla təyin edilir:

$$\{\sigma^e\} = [D^e] [B^e] \{\delta^e\} - [D^e] \{\varepsilon_1^e\} + \{\sigma_0^e\} \quad (35)$$

Düsturlardan görünür ki, elementin daxilində gərginlik sabit deyil, bu halda gərginliyi ortalamaq və onu elementin ağırlıq mərkəzinə aid etmək daha əlverişlidir. Onda element üçün gərginliklər matrisini belə yazmaq olar:

$$\left\{ \overset{\vee}{\sigma}^e \right\} = [D^e] [B^e] \{\delta^e\} - [D^e] \{\varepsilon_0^e\} + \{\sigma_0^e\} \quad (36)$$

Qurulan sərtlik matrisi  $[k]$  simmetrik və müsbət müəyyəndir və bu (19) tənliklər sistemini həll edərkən nəzərə alınır.

Sonlu elementlər metodundan istifadə edərək dirəklə torpaq özülünün təsirindən yaranan sərtlik parametrlərini hesablamaq mümkündür.

## ƏDƏBİYYAT

1. Галлагер Р. Метод конечных элементов. М.: Мир. 1984—428с.
2. Сегрелинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир. 1998—392с.
3. Утку С. Точные выражения матрицы жесткости для треугольных торовых элементов. «Ракетная техника и космонавтика» 1988, том 6, №6, с. 227-228.

## **ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

**Т.Б.АБДУЛЛАЕВ**

### **АННОТАЦИЯ**

Основная идея МКЭ состоит в том что любую непрерывную величину можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей. Перемещение аппроксимируется множеством кусочно-непрерывных функций. Для этого рассмотренная область упругой счеты разбивается на торовые элементы, полученные от вращения треугольников вокруг оси симметрии.

Здесь же отметим, что при аппроксимации перемещений полиномами первого порядка, предлагаем использование треугольных элементов первого порядка. Как следит из формулы, напряжения внутри элемента не постоянны. В этом случае удобно усреднять напряжения и относить их к центру тяжести элемента. Построения матрица жесткости симметрична и положительно определенная, что учитывается при решении системы уравнений.

## **THE PRINCIPLE RELATIONSHIPS OF THE METHOD OF FINITE ELEMENTS**

**T.B.ABDULLAYEV**

### **ABSTRACT**

In the paper it is told that the main idea of MFE is that any continuous magnitude can be approximated with discrete model which is build on the set of piecewise continuous functions.

At the approximation the polynomials of first order are used where triangle elements of first order are applied.